09/10/18

#1ο ΜΑΘΗΜΑ#

ΘΕΩΡΗΜΑ: Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 2 ορθές

16/10/18

#2ο ΜΑΘΗΜΑ#

#ΑΞΙΩΜΑΤΑ HILBERT ΓΙΑ ΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ#

ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΘΕΣΗΣ: Τα αξιώματα θέσης αναφέρονται σε σημεία και ευθείες. Προϋποθέτουμε, την ύπαρξη ενός συνόλου το οποίο καλούμε **ΕΠΙΠΕΔΟ**. Τα στοιχεία του συνόλου λέγονται **ΣΗΜΕΙΑ**.
Έχουμε, προκαθορίσει επίσης σύνολα (**ΥΠΟΣΥΝΟΛΑ**) τα οποία ονομάζουμε **ΕΥΘΕΙΕΣ**

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 : Για δυο οποιαδήποτε διακεκριμένα σημεία Α,Β υπάρχει μία και μόνο ευθεία l που τα περιέχει.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 : Κάθε, ευθεία περιέχει τουλάχιστον 2 σημεία

ΘΕΩΡΗΜΑ 3 : Υπάρχουν, τουλάχιστον τρία μη-συνευθειακά σημεία.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ένα, σύνολο τα στοιχεία του οποίου μαζί με ένα σύνολο υποσυνόλων του πληρούν τα αξιώματα Θ.1, Θ.2, Θ.3 λέγεται γεωμετρία θέσης.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

- Ας θεωρήσουμε, σύνολο $S = \{A, B, C, D, E\}$

Ας ορίσουμε ως ευθείες όλα τα δυοσύνολα

$l_1 = \{A, B\}$

$l_2 = \{A, C\}$

$l_3 = \{A, D\}$

$l_4 = \{A, E\}$

$l_5 = \{B, C\}$

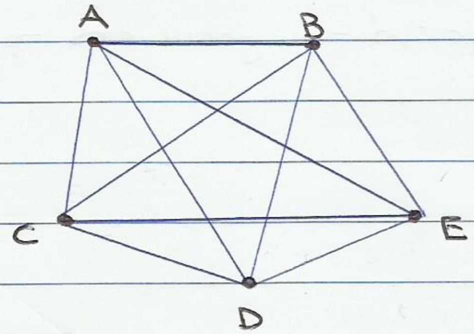
$l_6 = \{B, D\}$

$l_7 = \{B, E\}$

$l_8 = \{C, D\}$

$l_9 = \{C, E\}$

$l_{10} = \{D, E\}$



ΠΡΟΤΑΣΗ: Δυο διακεκριμένες ευθείες έχουν ΤΟ ΠΟΛΥ ΕΝΑ ΚΟΙΝΟ ΣΗΜΕΙΟ

[ΑΠΟΔΕΙΞΗ]:
- Έστω, l_1, l_2: δύο διακεκριμένες ευθείες
- Έστω, ότι τέμνονται σε δυο σημεία A, B με $A \neq B$

Από Θ.1 $\Rightarrow \exists$ μοναδική ευθεία που διέρχεται από δυο σημεία $\}$ Άτοπο! Αφού, $l_1 \neq l_2$

$\Downarrow$

$l_1 = l_2$

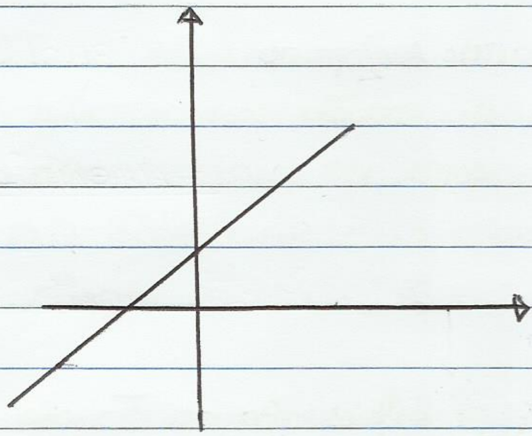
ΟΡΙΣΜΟΣ: Ένα, μοντέλο για το σύστημα αξιωμάτων θέσης είναι μία υλοποίηση του, δηλ. ένα σύνολο και// μια κλάση υποσυνόλων του που πληρούν τα Θ.1, Θ.2, Θ.3

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

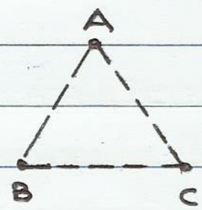
(a) [Το καρτεσιανό επίπεδο]

- Θεωρούμε, το $\mathbb{R}^2$. Ως ευθείες, ορίζουμε τα υποσύνολα:

$l = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by = 0\}$, όπου $a^2 + b^2 \neq 0$



(2) Θεωρώ το σύνολο $S=\{A,B,C\}$ και ορίζω σαν ευθείες τα υποσύνολα
$l_1=\{A,B\}$, $l_2=\{A,C\}$ και $l_3=\{B,C\}$



ΟΡΙΣΜΟΣ: Δύο ευθείες θα λέγονται ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ αν-ν δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

ΑΞΙΩΜΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑΣ: Για κάθε σημείο A και κάθε ευθεία l υπάρχει
"Π" μια το πολύ ευθεία που περιέχει το A και
είναι παράλληλη προς την l.

2▸ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΤΑ ΑΞΙΩΜΑΤΑ

(1) Πότε, ένα σύστημα αξιωμάτων είναι ανεξάρτητο;
[ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΟ = ΚΑΝΕΝΑ ΑΠΟ ΤΑ ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΔΕΝ ΠΡΟΚΥΠΤΕΙ ΑΠΟ ΤΑ ΑΛΛΑ]
[Ελέγχω ανεξαρτησία κατασκευάζοντας μοντέλα όπου ισχύουν όλα τα αξιώματα εκτός από ένα]

Πρόταση: Τα $\Theta.1$, $\Theta.2$, Θ_3 και (Π): Ανεξάρτητα

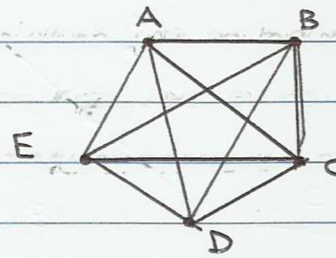
Απόδειξη: • 1ο: ΙΣΧΥΕΙ

2ο: -//-

3ο: -//-

4ο: ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ

• Έστω, $S=\{A,B,C,D,E\}$ με ευθείες όλα τα διάνυσμα



• 1ο: ΙΣΧΥΕΙ

2ο: -//-

3ο: ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ

4ο: ΙΣΧΥΕΙ

• $S=\{A,B\}$ και $l=\{A,B\}$

• 1ο: ΙΣΧΥΕΙ

2ο: ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ.

3ο: ΙΣΧΥΕΙ

4ο: ΙΣΧΥΕΙ

• $S=\{A,B,C\}$: Ευθείες και όλα τα διάνυσμα και $l=\{A\}$

• 1ο: ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ

2ο: ΙΣΧΥΕΙ

3ο: ΙΣΧΥΕΙ

4ο: ΙΣΧΥΕΙ

• $P=\{A,B,C\}$ ευθείες του ϕ

(2) Ένα σύστημα πρέπει να είναι αμφιβαστό

[Δηλ. να είναι αδύνατο να αποδείξουμε την αλήθεια μιας πρότασης αλλά και την άρνησή της ταυτόχρονα]

- Ο Gödel έδειξε ότι για ένα "πλαίσιο" σε αξιώματα σύστημα είναι αδύνατο να αποδείξουμε την αμφιβαστότητα.

(3) Είναι το σύστημα πλήρες;

[ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ: Είναι, αλήθεια ότι κάθε ισχυρισμός που αληθεύει σε κάθε μοντέλο μπορεί να αποδειχθεί ως συνέπεια των αξιωμάτων]

[Ο Gödel: ΠΝΕΥΜΑ ΑΝΤΙΛΟΓΙΑΣ] {Το $\mathbb{R}$: ΟΧΙ-ΠΛΗΡΕΣ}

(4) Το σύστημα κατηγορικό;

[Κατηγορικό: $\exists$ μοναδικό μοντέλο modulo ισομορφισμός]

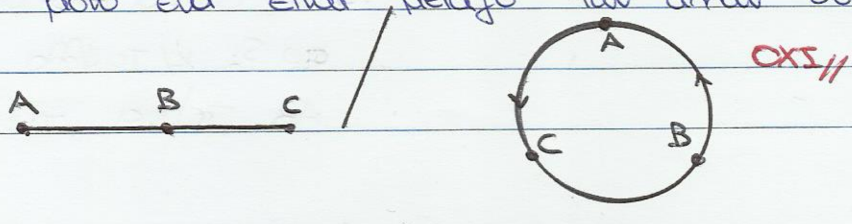
Z→ ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΔΙΑΤΑΞΗΣ ←Σ

- Περιγράφονται, πως τα σημεία βρίσκονται στο χώρο
- Προϋποθέτουμε, ότι έχουμε ένα σύνολο S, έχουμε καθορίσει τις ευθείες και ισχύουν τα $O.1$, $O.2$, $O.3$
- Η διάταξη θα είναι μία σχέση μεταξύ των σημείων του S που θα πληρούν τα παρακάτω:

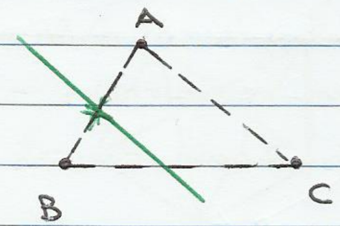
Δ.1: Αν το σημείο B είναι μεταξύ των A και C ($A*B*C$), τότε τα A, B, C: διακεκριμένα μεταξύ τους, ανήκουν σε μία ευθεία και $C*B*A$.

Δ.2: Για δυο οποιαδήποτε σημεία A και B υπάρχει C: $A*B*C$

Δ.3: Δοθέντων, 3 διακεκριμένων σημείων μιας ευθείας, ένα και μόνο ένα είναι μεταξύ των άλλων δυο



Δ4: [Pasch] Έστω, ότι A,B,C τρία μη-συνευθειακά σημεία και l μια ευθεία που δεν περιέχει κανένα από τα A,B,C. Εάν, η l: περιέχει ένα σημείο D, το οποίο είναι μεταξύ των A και B ⇒ Ή θα περιέχει ένα σημείο μεταξύ A,C ή ένα σημείο μεταξύ των B,C ΑΛΛΑ ΟΧΙ και των δυο.



ΟΡΙΣΜΟΣ: Άν A, B: δύο σημεία ορίζω ευθύγραμμο τμήμα AB (ή BA) να είναι το σύνολο που αποτελείται από τα A, B και όλα τα σημεία που είναι ανάμεσα.

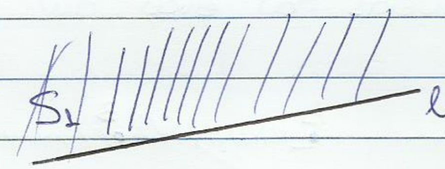
ΟΡΙΣΜΟΣ: Τρίγωνο, είναι η ένωση τριών ευθύγραμμων τμημάτων AB, BC, CA, όταν A,B,C: ΜΗ-ΣΥΝΕΥΘΕΙΑΚΑ.

* Τα αξιώματα της διάταξης επιτρέπουν να ορίσουμε τις έννοιες της ημιευθείας και ημιεπιπέδου *

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω, l: ευθεία ⇒ Το σύνολο των σημείων που δεν περιέχονται στην l χωρίζεται σε δυο μη-κενά σύνολα S_1, S_2 με τις εξής ιδιότητες: (α) Δυο σημεία A,B ∈ στο ίδιο σύνολο αν-ν το τμήμα AB δεν τέμνει την l.

(β) Δυο σημεία A,B ανήκουν το ένα στο S_1 κ/ το άλλο στο S_2 αν AB τέμνει την l.

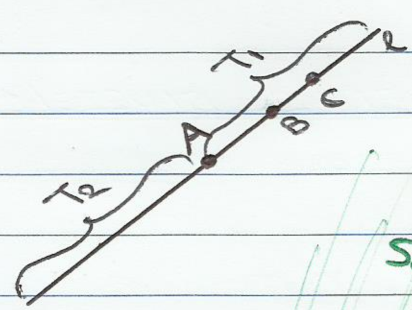
Ορισμος: Τα σύνολα S_1, S_2 στο προηγούμενο θεώρημα αναφέρονται ως ημιεπίπεδα με ακμή την ευθεία l

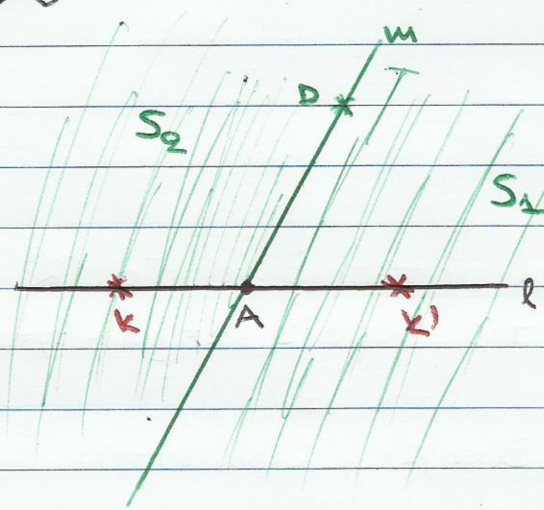


Θεώρημα: Έστω, A: σημείο μιας ευθείας l ⇒ Το σύνολο των σημείων της l που είναι διαφορετικά από το A χωρίζεται σε δυο μη-κενά σύνολα T_1 και T_2 ώστε:

(α) Δυο σημεία $B, C \in l$ ανήκουν στο ίδιο σύνολο (T_1 ή T_2) αν-ν το $\{A\} \cap BC \neq 0$

(β) Δυο σημεία $B, C \in l$ ανήκουν το ένα στο T_1 και το άλλο στο T_2 αν $A \in BC$





- Θεωρούμε σημείο $D \notin l$ και ευθεία m που διέρχεται από το D και το A.

- Η m: χωρίζει το επίπεδο σε δυο σύνολα S_1 και S_2

Ορίζω: $T_1 = S_1 \cap l \neq \emptyset$ [∀ ευθεία έχει τουλ. 2 σημεία]

$T_2 = S_2 \cap l \neq \emptyset$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω, σημεία Α,Β ημιευθεία με αρχή το Α είναι το
που αποτελείται από το Α και όλα τα σημεία
της ευθείας που είναι στην ίδια πλευρά με το Β

ΟΡΙΣΜΟΣ: Μια γωνία είναι η ένωση δύο ημιευθειών ΑΒ και
ΑC με κοινή αρχή Α
[Α, Β, C : ΟΧΙ-ΣΥΝΕΥΘΕΙΑΚΑ]